KAUFHOLD, G.
Math. Annalen, Bd. 137, S. 454—476 (1959)

Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades

Von

GÜNTER KAUFHOLD in Göttingen

6211/61

Versteht man unter $Z = X + iY$ eine n-reihige komplexe symmetrische Matrix positiven Imaginärteils Y; unter A, B, C, D n-reihige ganze Matrizen, für die $AB' = BA'$, $CD' = DC'$, $\operatorname{rg}(C, D) = n$ und $AM + BN = E$ (Einheitsmatrix) mit ganzen Matrizen M, N erfüllt ist; endlich unter $\{A, B\}$ bzw. $\{C, D\}$ die Gesamtheit der Paare UA, UB bzw. UC, UD (U beliebig unimodular); so hat man bekanntlich [1] in

$$\varphi(s) = \varphi(Z, s) = |Y|^{\frac{s}{2}} \sum_{\{A,B\}} \operatorname{abs}(AZ + B)^{-s}, \tag{1}$$

$$\psi(s) = \psi(Z, s) = |Y|^{\frac{s}{2}} \sum_{\{C,D\}} \operatorname{abs}(CZ + D)^{-s} \tag{2}$$

Dirichletsche Reihen mit der genauen Abszisse absoluter Konvergenz $n + 1$. [0]) Es erhebt sich die Frage [1] nach analytischer Fortsetzung dieser für $\operatorname{Re} s = \sigma > n + 1$ regulären Funktionen, insbesondere nach der Art der Singularität in $s = n + 1$; ferner nach der Existenz einer Funktionalgleichung, denn folgendermaßen läßt sich $\psi(s)$ als Verallgemeinerung der Epsteinschen Zetafunktion auffassen.

Der Menge der $Z^{(n)}$ entspricht offenbar vermöge

$$H = \operatorname{Re} Y^{-1}[(Z, E)] = \begin{pmatrix} Y + Y^{-1}[X] & X Y^{-1} \\ Y^{-1} X & Y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ X & E \end{pmatrix} \right]$$

eineindeutig die Menge der reell-symplektischen positiven Matrizen $H^{(2n)}$; für $n = 1$ ist dies die volle Menge der reellen positiven Matrizen $H^{(2)}$, $|H| = 1$. Nun wird $H[(C, D)'] = Y^{-1}[(CZ + D)']$,

$$\psi(s) = \sum_{\{C,D\}} |H[(C, D)']|^{-\frac{s}{2}}. \tag{2'}$$

Natürlich bleibt (2') richtig, wenn darin ψ, C, D durch φ, A, B ersetzt wird. Übrigens gilt $\psi(s) = \zeta_n(s)\, \varphi(s)$,

$$\zeta_n(s) = \sum_{\{K\}} (\operatorname{abs} K)^{-s} = \prod_{k=0}^{n-1} \zeta(s - k) \qquad (\sigma > n), \tag{3}$$

[0]) Eine Bezeichnungserklärung findet sich am Ende dieser Einleitung.

wenn $K^{(n)}$ eine ganze Matrix mit $|K| \neq 0$ und $\{K\}$ die Gesamtheit der UK (U beliebig unimodular) bezeichnet.

Man ist geneigt, die Untersuchung von $\psi(s)$ mit Hilfe einer Integraldarstellung vorzunehmen [2] [4, S. 585]:

$$\Gamma_n(s) = |W|^s \int_{\mathfrak{P}_n} |P|^{s-\frac{n+1}{2}} e^{-\sigma(WP)}\, dP = \prod_{k=0}^{n-1} \pi^{\frac{k}{2}}\, \Gamma\left(s-\frac{k}{2}\right) \quad \left(\sigma > \frac{n-1}{2},\ \mathrm{Re}\, W^{(n)} > 0\right), \tag{4}$$

$$\pi^{-n\frac{s}{2}}\, \Gamma_n\left(\frac{s}{2}\right) \psi(s) = \sum_{\{C,D\}} \int_{\mathfrak{P}_n} |P|^{\frac{s-n-1}{2}} e^{-\pi\sigma(H[(C,D)']P)}\, dP$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{P}_n^*} |P|^{\frac{s-n-1}{2}} \vartheta(H,P)\, dP,$$

$$\vartheta(H,P) = \sum e^{-\pi\sigma(H[(C,D)']P)}\ ;$$

dabei bedeutet $\mathfrak{P}_n^*$ einen Fundamentalbereich für die Abbildungen $P \to P[U]$ (U unimodular) des Raumes $\mathfrak{P}_n$ der n-reihigen reellen positiven Matrizen P auf sich. Nun ist aber in der „Thetareihe" $\vartheta(H,P)$ über alle ganzen Matrizen (C,D) vom Rang n zu summieren, die $CD' = DC'$ erfüllen: für $n > 1$ eine eingeschränkte Summation, die Riemanns für $\zeta(s)$ verwendete Methode nicht — unmittelbar — anwendbar erscheinen läßt.

In dieser Arbeit wird $\varphi(s)$, $\psi(s)$ im Fall $n = 2$ auf eine Weise untersucht werden, die für $n \geqq 3$ einen größeren Rechenaufwand erforderte, für $n = 1$ aber ganz einfach verläuft und an diesem Beispiel jetzt erläutert werden mag. Mit den Bezeichnungen $Z = (z)$, $A = (a)$, ... und abs $Z = |z|$ gestattet

$$\varphi(s) = y^{\frac{s}{2}} \left(1 + \sum_{\substack{\frac{b}{a} \bmod 1 \\ a>0}} a^{-s} \sum_{g=-\infty}^{\infty} \left|z + \frac{b}{a} + g\right|^{-s}\right) \tag{5}$$

die Fouriersche Entwicklung

$$\varphi(s) = y^{\frac{s}{2}} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t(s)\, b_t(s)\, e^{2\pi i t x}, \tag{6}$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) a_t(s) = \begin{cases} y^{\frac{2-s}{2}}\, \pi^{-\frac{s-1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) & (t=0) \\ \dfrac{(4\pi y)^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} |t|^{s-1} e^{-2\pi|t|y} \displaystyle\int_0^{\infty} \{(v+1)v\}^{\frac{s}{2}-1} e^{-4\pi|t|yv}\, dv & (t \neq 0), \end{cases} \tag{7}$$

$$\zeta(s)\, b_t(s) = \zeta(s) \sum_{\substack{\frac{b}{a} \bmod 1 \\ a>0}} a^{-s} e^{2\pi i t \frac{b}{a}} = \sum_{k|t} k^{1-s}. \tag{8}$$

Für $t \neq 0$ stehen in (7), (8) ganze Funktionen von s, die

$$(|t|\pi)^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) a_t(s) = \alpha(s) = \alpha(2-s)\,, \tag{9}$$

$$|t|^{\frac{s}{2}}\,\zeta(s)\,b_t(s) = \beta(s) = \beta(2-s) \tag{10}$$

erfüllen; wogegen

$$\varrho(s)\,a_0(s)\,b_0(s) = y^{\frac{2-s}{2}}\,\varrho(s-1)\,,\quad \varrho(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,. \tag{11}$$

Das Integral in (7) konvergiert absolut für $\sigma > 0$; bei beliebig festem $\mu > 0$, $\mu > 1 - \sigma$ gilt gleichmäßig in s $\sum\limits_{k\,|\,t} k^{1-s} = O(|t|^{2\mu})$ $(t \neq 0)$; und $\sum\limits_{t \neq 0} |t|^{\nu} e^{-2\pi y|t|}$ konvergiert auch für $\nu > 0$. Nach (7), (8) ist also (6) gewiß für $\sigma > 0$ gültig, nach (9), (10) sogar in der ganzen s-Ebene. Dabei erweist sich $\varphi(s)$ als meromorphe Funktion, die dank $\varrho(s) = \varrho(1-s)$ und (9), (10) der Funktionalgleichung

$$\varrho(s)\,\varphi(s) = \omega(s) = \omega(2-s) \tag{12}$$

genügt; die Pole von $\omega(s)$ sind von 1. Ordnung und liegen in $s = 0$ und $s = 2$ mit den Residuen -1 bzw. 1, während $\psi(s) = \zeta(s)\,\varphi(s)$ nur den Pol 1. Ordnung in $s = 2$ vom Residuum π besitzt.

Für beliebiges n kennt man [5] statt (5) die Zerlegung

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(s) &= |Y|^{\frac{s}{2}} + \sum_{h=1}^{n} \varphi_h(s)\,,\\ \varphi_h(s) &= |Y|^{\frac{s}{2}} \sum_{\substack{\{A,\,B\}\\ \operatorname{rg} A = h}} \operatorname{abs}(AZ+B)^{-s}\\ &= |Y|^{\frac{s}{2}} \sum_{\{Q\},\ R \bmod 1} \nu(R)^{-s} \sum_{G} \operatorname{abs}(Z[Q]+R+G)^{-s}\,, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

in welcher $R^{(h)} = R'$, $G^{(h)} = G'$, $(Q^{(n,h)}, *)$ der Reihe nach eine rationale, ganze, unimodulare Matrix bedeutet; $\{Q\}$ ist die Gesamtheit der QU (U beliebig unimodular) und $\nu(R)$ das Produkt der gekürzten Nenner der Elementarteiler von R. Über die Fouriersche Entwicklung

$$|Y|^{\frac{s}{2}} \sum_{G^{(n)}} \operatorname{abs}(Z+G)^{-s} = \sum_{T} a_T(s)\,e^{2\pi i\sigma(TX)}\,,$$

$$\left\{\begin{aligned} a_T(s) = a_T(Y,s) &= |Y|^{\frac{s}{2}} \int_{V} \operatorname{abs}(V+iY)^{-s} e^{-2\pi i\sigma(TV)}\,dV\\ &= \frac{2^n \pi^{ns}\,|Y|^{\frac{s}{2}}}{\Gamma_n^2\left(\frac{s}{2}\right)} \int\limits_{\substack{V+T>0\\ V-T>0}} |(V+T)(V-T)|^{\frac{s-n-1}{2}}\, e^{-2\pi\sigma(VY)}\,dV\,, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

bei reellem $V^{(n)} = V'$ und halbganzem $T^{(n)} = T'$, findet man diejenige von

$\varphi_h(s)$, z. B.

$$\begin{cases} \varphi_1(s) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{Q} |Y|^{\frac{s}{2}}\, Y[Q]^{-\frac{s}{2}}\, a_t(Y[Q], s)\, b_t(s) e^{2\pi i t X[Q]}, \\ \varphi_n(s) = \sum_{T} a_T(s)\, b_T(s) e^{2\pi i \sigma(TX)}, \end{cases} \tag{15}$$

$$b_T(s) = \sum_{R^{(n)} \bmod 1} \nu(R)^{-s} e^{2\pi i \sigma(TR)}, \tag{16}$$

unter Q jetzt eine Spalte teilerfremder ganzer Zahlen verstanden, die (für die Summation in (15)) mit $-Q$ zu identifizieren ist.

Über die Glieder von $\varphi_1(s)$ in der Entwicklung (15) hat man die Aussagen (7)—(11), über diejenigen von $\varphi_n(s)$ werden für $n = 2$ in § 1 und § 2 analoge Aussagen bewiesen werden. Einige Rechnungen findet man dort für beliebiges n durchgeführt. In § 3 wird endlich zusammenfassend ersichtlich, daß $\varphi(s)$ auch im Fall $n = 2$ meromorph ist und einer Funktionalgleichung,

$$\varrho(s)\, \varrho(2s-2)\, \varphi(s) = \omega(s) = \omega(3-s), \tag{17}$$

genügt. Der Faktor $\varrho(s)\, \varrho(2s-2)$ tritt schon in dem zu (11) analogen Glied

$$\varrho(s)\, \varrho(2s-2)\, a_0(s)\, b_0(s) = |Y|^{\frac{3-s}{2}}\, \varrho(s-2)\, \varrho(2s-3)$$

(mit der Nummer $T = 0$ in der Fourierentwicklung von $\varrho(s)\, \varrho(2s-2)\, \varphi_2(s)$) auf; dieses Glied liefert die Singularität in $s = 3$, so daß dort $\varphi(s)$ einen Pol 1. Ordnung vom Residuum $90\pi^{-2}$ besitzt.

Für $n = 3$ gilt übrigens

$$\varrho(s)\, \varrho(2s-2)\, a_0(s)\, b_0(s) = |Y|^{\frac{4-s}{2}}\, \varrho(s-3)\, \varrho(2s-5)$$

und allgemein wahrscheinlich

$$\pi(s)\, a_0(s)\, b_0(s) = |Y|^{\frac{n+1-s}{2}}\, \pi(n+1-s), \quad \pi(s) = \varrho(s) \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varrho(2s-2k).$$

Setzt man schließlich gemäß (3), (4)

$$\varrho_n(s) = \pi^{-n\frac{s}{2}}\, \Gamma_n\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} \varrho(s-k),$$

so hat man (neben $\varrho_n(s) = \varrho_n(n-s)$)

$$\frac{\varrho_n(s)}{\varrho(s)} = \frac{\varrho_n(n+1-s)}{\varrho(n+1-s)}.$$

Daher kann man, im Hinblick auf $\psi(s) = \zeta_2(s)\, \varphi(s)$, (17) auch durch

$$\varrho_2(s)\, \varrho(2s-2)\, \varphi(s) = \omega^*(s) = \omega^*(3-s)$$

ersetzen.

In dieser Arbeit wird, für eine komplexe Matrix K, mit K', $\overline{K}$, $\sigma(K)$, $|K|$, $\mathrm{abs}K$, $\mathrm{rg}K$ der Reihe nach die Transponierte, Konjugierte, Spur, Determinante, der Absolutbetrag der Determinante und der Rang bezeichnet. Die Schreibweise $K^{(m,n)}$ und $K^{(n)}$ (d. i. $K^{(n,n)}$) nennt zusätzlich die Anzahlen m der Zeilen und n der Spalten von K; $K = (K_1, K_2)$ und dergleichen deutet eine

Aufteilung von K in Untermatrizen an, wobei in (etwa) $(*, K_2)$ der Stern die Stelle einer nicht interessierenden Untermatrix ausfüllt. $L[K]$ ist Abkürzung für $\overline{K}'LK$, also sinngemäß $[K]$ für $\overline{K}'K$. Für reelles symmetrisches $S = (s_{kl})$ bedeutet $S > 0$ („S ist positiv") bzw. $S \geqq 0$, daß S die Matrix einer positiv-definiten bzw. positiv-semidefiniten quadratischen Form ist. Sind die s_{kl} Variable, so wird $dS = \prod_{k \leqq l} ds_{kl}$ definiert; dies gelte auch für nichtsymmetrisches S unter Weglassung der Beschränkung $k \leqq l$.

Herrn Prof. Dr. C. L. SIEGEL danke ich für Anregungen und dauerndes Interesse am Entstehen dieser Arbeit.

Diese Arbeit ist meine Dissertation, die von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen angenommen wurde.

§ 1. $a_T(Y, s)$

1. $Z^{(n)} = X + iY$ bedeute, wie in der Einleitung, eine fest gewählte Parametermatrix. Das Integral

$$a_W(s) = a_W(Y, s) = |Y|^{\frac{s}{2}} \int_V \operatorname{abs}(V + iY)^{-s} e^{-2\pi i \sigma(VW)} dV \tag{1.1}$$

($V^{(n)} = V' = (v_{kl})$ und $W^{(n)} = W' = (w_{kl})$ reell) und bekanntlich [1] auch die Dirichletsche Reihe $\sum_G \operatorname{abs}(Z + G)^{-s}$ ($G^{(n)} = G'$ ganz) konvergieren absolut genau für $\operatorname{Re} s = \sigma > n$, *weil*

$$|Y|^{\frac{s-n-1}{2}} a_0(Y, s) = 2^{n\left(\frac{n+3}{2} - s\right)} \frac{\gamma_n\left(s - \frac{n+1}{2}\right)}{\gamma_n^2\left(\frac{s}{2}\right)} \tag{1.2}$$

mit der Abkürzung, vgl. (4),

$$\gamma_n(s) = \pi^{-ns} \Gamma_n(s) \qquad (\gamma_1(s) = \gamma(s)) \tag{1.3}$$

gilt. Die Konvergenz der Reihe ist gleichmäßig auf jeder Z-Menge, auf der Y^{-1} beschränkt ist (was man durch eine einfache Ergänzung der Rechnung in [1] zeigen kann); doch schon eine schwächere Aussage rechtfertigt die Gleichung

$$a_T(s) = |Y|^{\frac{s}{2}} \int_{0 \leqq v_{kl} \leqq 1} \sum_G \operatorname{abs}(V + iY + G)^{-s} e^{-2\pi i \sigma(TV)} dV$$

($T^{(n)} = T'$ halbganz, d. h., $2T$ ganz mit geraden Hauptdiagonalelementen). Danach steht

$$|Y|^{\frac{s}{2}} \sum_G \operatorname{abs}(Z + G)^{-s} = \sum_T a_T(s) e^{2\pi i \sigma(TX)} \qquad (\sigma > n) \tag{1.4}$$

fest, sobald die absolute Konvergenz der rechten Reihe bewiesen ist.

Zufolge (4), (1.3), also

$$(\operatorname{abs} Z)^{-s} = |-iZ|^{-\frac{s}{2}} |i\overline{Z}|^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{\gamma_n^2\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{P>0, Q>0} |PQ|^{\frac{s-n-1}{2}} e^{\pi i \sigma(PZ - Q\overline{Z})} dP\, dQ$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_W c_W(s)\, e^{2\pi i \sigma(WX)} dW,$$

wobei $P+Q=2V$, $P-Q=2W$, $dP\,dQ=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\,dV\,dW$ und

$$(1.5)\quad c_W(s)=c_W(Y,s)=\frac{2^n}{\gamma_n^2\left(\frac{s}{2}\right)}\int\limits_{\substack{V+W>0\\V-W>0}}|(V+W)(V-W)|^{\frac{s-n-1}{2}}\,e^{-2\pi\sigma(VY)}\,dV$$

gesetzt worden ist, ergibt sich

$$\operatorname{abs}(Z-G)^{-s}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\int\limits_{\mathfrak{W}}\sum_T c_{T+W}(s)\,e^{2\pi i\sigma((T+W)X)-2\pi i\sigma(GW)}\,dW\,,$$

$$(1.6)\quad \sum_G \operatorname{abs}(Z-G)^{-s}\,e^{2\pi i\sigma(GW)}=\sum_T c_{T+W}(s)\,e^{2\pi i\sigma((T+W)X)}\qquad(\sigma>n)\,,$$

wenn noch die absolute und auf der Menge $\mathfrak{W}$,

$$0\leqq w_{kk}\leqq 1\ (1\leqq k\leqq n),\quad 0\leqq w_{kl}\leqq\frac{1}{2}\ (1\leqq k<l\leqq n)\,,$$

gleichmäßige Konvergenz der rechten Reihe bewiesen wird. Man wähle zu W ein reelles $C^{(n)}$, für welches $W[C^{-1}]$ eine Diagonalmatrix mit allein Zahlen 1, -1, 0 in der Hauptdiagonalen ist. Setzt man $[C]=H$ und $d_W(s)$ für das Integral in (1.5), so gilt hinsichtlich $d_{T+W}(s)$

$$\pm W\leqq H^{1}),\ 0<V\pm T\pm W\leqq V\pm T+H,\ |V\pm T\pm W|\leqq|V\pm T+H|,$$

$$(1.7)\qquad d_{T+W}(\sigma)\leqq e^{2\pi\sigma(HY)}\,d_T(\sigma)\qquad(\sigma\geqq n+1)\,.$$

Da nach (4) $d_0(\sigma)$ für $\sigma>n$ existiert, liefert (1.7) insbesondere die absolute Konvergenz von $d_W(s)$ gewiß für $\sigma\geqq n+1$ (vgl. [3], S. 60). Ist nun W aus $\mathfrak{W}$, so läßt sich auch C als beschränkt annehmen, und (1.7) zeigt, daß zur Rechtfertigung von (1.6) wenigstens für $\sigma\geqq n+1$ der Nachweis der Konvergenz der Reihe $\sum_T d_T(\sigma)$ $(\sigma\geqq n+1)$ genügt. Aus (1.6), für $\sigma\geqq n+1$, folgt speziell (14), d. i.

$$(1.8)\qquad a_T(Y,s)=|Y|^{-\frac{s}{2}}\,c_T(Y,s)\,,$$

und (1.4), ebenfalls für $\sigma\geqq n+1$. Gemäß (1.1), (1.2), (1.5), (1.8) ergibt sich weiter

$$d_T(\sigma)\leqq|2Y|^{\frac{n+1}{2}-\sigma}\,\gamma_n\left(\sigma-\frac{n+1}{2}\right),$$

also die absolute Konvergenz von $d_T(s)$ sogar für $\sigma>n$; und die Gültigkeit von (1.4) schlechthin (d. h. für $\sigma>n$) erfordert noch die Probe, ob der Konvergenzbeweis für $\sum_T d_T(\sigma)$ auch bei $\sigma>n$ richtig bleibt.[2])

Über $d_W(s)=d_W(Y,s)$ ist bekannt [3, S. 61]:

---

[1]) das heißt: $H\mp W\geqq 0$;

[2]) Die durch (1.4), (1.5), (1.8) gelieferte Fouriersche Entwicklung ist schon ohne Beweis in [3], S. 65, angegeben.

Hilfssatz 1: *Für* $W^{(n)}=\begin{pmatrix} W_1^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y^{(n)}=\begin{pmatrix} Y_1^{(h)} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ *gilt*

$$|Y|^{s-\frac{n+1}{2}}\, d_W(Y,s) = 2^{(n-h)\left(\frac{n-h+1}{2}-s\right)}\, \gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right) \times$$
$$\times\, |Y_1|^{s-n+h-\frac{h+1}{2}}\, d_{W_1}(Y_1, s-n+h) \qquad (0<h<n).$$

Danach gestattet die durch eine Integraltransformation erhältliche Formel

$$d_{W[C']}(Y,s) = (\mathrm{abs}\, C)^{2s-n-1}\, d_W(Y[C],s) \qquad \begin{pmatrix} C^{(n)} \text{ reell} \\ |C|\neq 0 \end{pmatrix}$$

die Verallgemeinerung:

Hilfssatz 2: *Für* $W_1^{(h)}$, $Y^{(n)}$ *und* $C_1^{(n,h)}$, $\mathrm{rg}\, C_1 = h$, *gilt*

$$d_{W_1[C_1']}(Y,s) = 2^{(n-h)\left(\frac{n-h+1}{2}-s\right)}\, \gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right) \times$$
$$\times\, |Y|^{\frac{n+1}{2}-s}\, |Y[C_1]|^{s-n+\frac{h-1}{2}}\, d_{W_1}(Y[C_1], s-n+h) \qquad (0<h<n).$$

Denn ist $W^{(n)}=\begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{(n)}=(C_1,*)$, $|C|\neq 0$, so wird $W[C']=W_1[C_1']$, $Y[C]=\begin{pmatrix} Y[C_1] & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Im folgenden sei $h=1,\ldots,n$ fest. Durchläuft $T_1^{(h)}$ alle halbganzen Matrizen mit $|T_1|\neq 0$, $Q^{(n,h)}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der bei (13) erklärten Klassen $\{Q\}$, so offenbar

$$(1.9) \qquad T^{(n)}=\begin{pmatrix} T_1^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U'] = T_1[Q'] \qquad (U^{(n)}=(Q^{(n,h)},*) \text{ unimodular})$$

gerade alle halbganzen $T^{(n)}$ vom Rang h. Dabei sei etwa $Q^{(n,n)}=E$. Bei festem $Y^{(n)}>0$ ordne man jedem $T_1^{(h)}$, $|T_1|\neq 0$, ein reelles $D^{(h)}$ zu, für welches

$$(1.10) \qquad T_1=\begin{pmatrix} E^{(p)} & 0 \\ 0 & -E^{(q)} \end{pmatrix}[D] \qquad (p+q=h;\ p,q\geqq 0)$$

gilt, und setze

$$(1.11) \qquad H=[D], \quad 4\pi\, Y[QD']=L,$$

$$(1.12) \qquad I^p=\begin{pmatrix} E^{(p)} & 0 \\ 0 & 0^{(q)} \end{pmatrix}, \quad I_q=\begin{pmatrix} 0^{(p)} & 0 \\ 0 & E^{(q)} \end{pmatrix} \qquad (p+q=h;\ p,q\geqq 0),$$

$$(1.13)\ h_{pq}(L,\alpha,\beta) = \int\limits_{V+I^p>0,\ V+I_q>0} |V+I^p|^{\alpha-\frac{h+1}{2}}\, |V+I_q|^{\beta-\frac{h+1}{2}}\, e^{-\sigma(VL)}\, dV^{(h)} \qquad (L^{(h)}>0).$$

Vermöge Hilfssatz 2, (1.9)—(1.13) und der Substitution $V=(2V^*+E)[D]$, $dV=|2H|^{\frac{h+1}{2}}\, dV^*$ im Integral $d_{T_1}(Y[Q], s-n+h)$ wird

$$(1.14) \qquad \begin{cases} d_T(s)=2^{(n-h)\left(\frac{n-h+1}{2}-s\right)}\, \gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right)\, |Y|^{\frac{n+1}{2}-s} \times \\ \times\, |2H\,Y[Q]|^{s-n+\frac{h-1}{2}}\, e^{-2\pi\sigma(HY[Q])}\, h_{pq}\left(L, \frac{s-n+h}{2}, \frac{s-n+h}{2}\right) \end{cases}$$

(mit sinngemäß $\gamma_0=1$).

Die Konvergenz von $\sum_T d_T(\sigma)$ für $\sigma > n$ folgt nach dem Gesagten aus dem (im folgenden allerdings nur für $n \leqq 2$ bewiesenen)

Hilfssatz 3: *Sind α, β, $\varkappa$, λ reelle Zahlen, für die das Integral* (1.13) *existiert, so konvergiert*

$$S_{pq} = \sum |2H|^{\varkappa} |Y[Q]|^{\lambda} e^{-2\pi\sigma(HY[Q])} h_{pq}(L, \alpha, \beta) \quad \begin{pmatrix} p+q=1,\ldots,n \\ p, q \geqq 0 \end{pmatrix},$$

summiert gemäß (1.10), (1.11) *über alle halbganzen $T_1^{(h)}$ der Signatur $p, q (h = p + q)$ und alle Klassen $\{Q^{(n,h)}\}$.*

Zum Beweis des Satzes wird man eine $h_{pq}(L, \alpha, \beta)$ majorisierende einfachere Funktion von L suchen. Im Fall $n = h = 1$ findet man eine l-Potenz $(L = (l))$: und der Satz ist evident. Nach Studium von h_{pq} für $p + q = 2$ wird am Ende des Paragraphen auch der Fall $n = 2$ erledigt werden. Für beliebiges n mag hier wenigstens das Integral $h_n = h_{n0}$ untersucht werden[3]).

Zu reellem $A^{(n)} \geqq 0$ wird eine reelle „Wurzel" $C^{(n)} = \sqrt{A}$ durch $A = [C]$ erklärt; mit C ist auch $\sqrt{E}\,C$ Wurzel ($\sqrt{E}$ beliebig orthogonal). Für ein Matrizenpaar $A^{(n)} \geqq 0$, $B^{(n)} > 0$ kann man ein Wurzelpaar $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ finden, das

$$\sqrt{A}'\sqrt{B} = \sqrt{B}'\sqrt{A} \quad \text{oder auch} \quad \sqrt{A}\sqrt{B}' = \sqrt{B}\sqrt{A}'$$

erfüllt, weil bei gewissem D

$$B = [D],\ A = [GD] \text{ oder auch } B = [D],\ A = [GD'^{-1}]$$

mit einer Diagonalmatrix G statthat. Insbesondere rechnet man

$$[\sqrt{A}'] = [\sqrt{E}\sqrt{A}'] = [\sqrt{A}\sqrt{E}'] = A[\sqrt{E}'].$$

Nun wird, bei reellem symmetrischem $V^{(n)} = \begin{pmatrix} V_1^{(k)} & V_3 \\ V_3' & V_2 \end{pmatrix}$, $W^{(n)} = \begin{pmatrix} W_1^{(k)} & K \\ K' & W_2 \end{pmatrix}$ und Einheitsmatrizen $E_1^{(k)}$, $E_2^{(n-k)} (k = 1, \ldots, n-1)$, vermöge

$$V_1 = W_1 \geqq 0,\ V_2 = W_2[\sqrt{[K] + E_2}] + (W_1 + E_1)[K],$$

$$V_3 = \sqrt{W_1}'\sqrt{W_1 + E_1}K = \sqrt{W_1 + E_1}'\sqrt{W_1}K$$

„$V > 0$" gleichwertig mit „$V_1 > 0$, $V_2 - V_1^{-1}[V_3] = W_2[\sqrt{[K] + E_2}] > 0$" oder auch „$W_1 > 0$, $W_2 > 0$, K beliebig reell"; ferner:

$$|V| = |W_1|\,|W_2|\,|[K] + E_2|,\ |V + E| = |W_1 + E_1|\,|W_2 + E_2|\,|[K] + E_2|,$$

$$dV_2\,dV_3 = \operatorname{abs}\left(\frac{\partial(V_2, V_3)}{\partial(V_2, K)}\frac{\partial(V_2, K)}{\partial(W_2, K)}\right) dW_2\,dK$$

$$= (|W_1|\,|W_1 + E_1|)^{\frac{n-k}{2}}\,|[K] + E_2|^{\frac{n-k+1}{2}}\,dW_2\,dK;$$

also, wenn $L^{(n)} = \begin{pmatrix} L_1^{(k)} & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} > 0$, $\sqrt{L_2}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit als *Diagonalmatrizen* genommen werden, zufolge (1.13):

$$h_n(L, \alpha, \beta) = \int_K h_k(L_2[K'] + L_1, \alpha, \beta)\, h_{n-k}\left([K\sqrt{L_2}] + L_2, \alpha - \frac{k}{2}, \beta - \frac{k}{2}\right) \times$$

$$\times |[K] + E|^{\alpha + \beta - \frac{n+k+1}{2}} e^{-\sigma(L_2[K'])}\,dK;$$

[3]) Die nachfolgende Rechnung wird für $n = 2$ später (im Beweis von Hilfssatz 6) teilweise wiederholt, damit für diesen Fall deren Einfachheit deutlich wird. Für $n = 1$ ist sie sogar meist gegenstandslos.

wobei noch (mit zunächst unnormiertem $\sqrt{L_2}$)

$$\sigma(W_2[\sqrt{[K]+E}\,]\,L_2) = \sigma([\sqrt{L_2}\sqrt{[K]+E}\,']\,W_2) = \sigma(([K]+E)[\sqrt{L_2}']\,W_2)$$
$$= \sigma([[K\sqrt{L_2}'\,S'] + [\sqrt{L_2}'\,S']]\,W_2[S']) \qquad (E = E_2;\ S \text{ orthogonal})$$

sowie die Invarianz des Integrals h_{n-k} bei „orthogonaler Transformation" beachtet werden muß.

Insbesondere gilt, nunmehr mit reellem α, β,

$$h_n(L, \alpha, \beta) < h_k(L_1, \alpha, \beta)\, h_{n-k}\left(L_2, \alpha - \frac{k}{2}, \beta - \frac{k}{2}\right) \times$$
$$\times \int_K |[K]+E|^{\alpha+\beta-\frac{n+k+1}{2}}\, e^{-\sigma([K]L_2)}\, dK\ ,$$

und damit (durch vollständige Induktion nach n) Existenz von $h_n(L, \alpha, \beta)$ für $\beta > \frac{n-1}{2}$ und beliebiges α; $\int_K$ konvergiert ja mit jedem Wert des Exponenten.

Die Ungleichung verhilft weiter zur Aufstellung einer Funktion $f(L)$,

$$h_n(L, \alpha, \beta) < c f(L) \qquad (c > 0 \text{ von } L \text{ unabhängig}),$$

für jedes Paar $\beta\left(> \frac{n-1}{2}\right)$, α; dabei darf man über $L = \begin{pmatrix} l_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & l_n \end{pmatrix} l_1 \leqq \cdots \leqq l_n$ voraussetzen. Offenbar kann man, s. (4),

$$f(L) = |L|^{-\beta} \qquad \left(c = \Gamma_n(\beta);\ \alpha < \frac{n+1}{2}\right)$$

setzen; sonst, bei $k = 0, \ldots, n$,

$$f(L) = |L_1|^{-\left(\beta+\alpha-\frac{k+1}{2}\right)} |L_2|^{-\beta} \qquad \left(L_1^{(k)} \leqq E,\ L_2^{(n-k)} \geqq E;\ \alpha \geqq \frac{n+1}{2}\right).$$

Letzteres ergibt sich für $k = 0$ und $k = n$ aus

$$h_n(L,\alpha,\beta) = |L|^{-\beta} \int_{V>0} |V[\sqrt{L^{-1}}] + E|^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\, |V|^{\beta-\frac{n+1}{2}}\, e^{-\sigma(V)}\, dV$$
$$= |L|^{\frac{n+1}{2}-\alpha-\beta} \int_{V>0} |V+L|^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\, |V|^{\beta-\frac{n+1}{2}}\, e^{-\sigma(V)}\, dV$$

mit diagonalem $\sqrt{L^{-1}}$, unter Beachtung, im Fall $L \geqq E$ ($k = 0$), der Schlußkette

$$|V[\sqrt{L^{-1}}'\,S_1'] + E| = |L^{-1}[\sqrt{V}\,'] + E| \leqq |[\sqrt{V}\,'] + E| = |[\sqrt{V}\,'\,S_2'] + E|$$
$$= |V[S_3] + E| = |V+E| \qquad (S_1, S_2, S_3 \text{ orthogonal}).$$

Für $k = 1, \ldots, n-1$ benutze man die Rekursions-Ungleichung und vermerke $\left(\text{mit } \gamma = \alpha+\beta-\frac{n+k+1}{2} > 0\right)$

$$\int_{K(k,n-k)} |[K]+E|^{\gamma}\, e^{-\sigma([K]L_2)}\, dK = |L_2|^{-\frac{k}{2}} \int_K |[K\sqrt{L_2^{-1}}] + E|^{\gamma}\, e^{-\sigma([K])}\, dK,$$
$$|[K\sqrt{L_2^{-1}}] + E| \leqq |[K] + E|\ ,$$

dies durch Wiederholung obiger Schlüsse.

2. Vermöge (1.5) schreiben sich die Hilfssätze 1 und 2 auf $c_W(Y, s)$ um; und durch (1.8), für halbganzes $W = T$, weiter auf $a_T(Y, s)$. Letztere Formeln lassen sich auch leicht, sogar für reelles W, anhand der ursprünglichen Gestalt (1.1) herleiten — bei gleichzeitiger Bestätigung von (1.2). Zufolge (4), (1.3), also

$$\gamma_n(s) = \gamma_{n-h}(s)\,\gamma_h\left(s - \frac{n-h}{2}\right) \qquad (0 < h < n) \tag{1.15}$$

ist zu zeigen:

Hilfssatz 4: *Für* $W^{(n)} = \begin{pmatrix} W_1^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y^{(n)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(h)} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ *gilt*

$$|Y|^{\frac{s-n-1}{2}}\, a_W(Y,s) = 2^{(n-h)\left(\frac{n-h+3}{2}-s\right)} \frac{\gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right)}{\gamma_{n-h}^2\left(\frac{s}{2}\right)} \times$$

$$\times\, |Y_1|^{\frac{s-n-1}{2}}\, a_{W_1}(Y_1, s-n+h) \qquad (0 < h < n).$$

Hieraus folgt über

$$a_{W[C']}(Y[C^{-1}], s) = (\operatorname{abs} C)^{s-n-1} a_W(Y, s) \qquad \left(\begin{matrix} C^{(n)} \text{ reell} \\ |C| \neq 0 \end{matrix}\right) \tag{1.16}$$

Hilfssatz 5: *Für* $W_1^{(h)}$, $Y^{(n)}$ *und* $C_1^{(n,h)}$, $\operatorname{rg} C_1 = h$, *gilt*

$$a_{W_1[C_1']}(Y, s) = 2^{(n-h)\left(\frac{n-h+3}{2}-s\right)} \frac{\gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right)}{\gamma_{n-h}^2\left(\frac{s}{2}\right)} \times$$

$$\times\, |Y[C_1]|^{\frac{s-n-1}{2}}\, |Y|^{\frac{n+1-s}{2}}\, a_{W_1}(Y[C_1], s-n+h) \qquad (0 < h < n).$$

Beweis von Hs. 4: Auf Grund der Gleichungen

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_3 \\ Y_3' & Y_2 \end{pmatrix} = [LM],\quad L = \begin{pmatrix} L_1^{(h)} & 0 \\ 0 & L_2^{(n-h)} \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} [L_1] = Y_1, \\ [L_2] = Y_2 - Y_1^{-1}[Y_3], \end{matrix}\quad M = \begin{pmatrix} E_1 & Y_1^{-1} Y_3 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

(mit Einheitsmatrizen $E_1^{(h)}$, $E_2^{(n-h)}$) und $W[(LM)'] = \begin{pmatrix} W_1[L_1'] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, in Verbindung mit (1.16), braucht man den Satz nur noch mit E, E_1, $W^* = \begin{pmatrix} W_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W_1^* = W_1[L_1']$ statt Y, Y_1, W, W_1 zu beweisen; man schreibe für W^*, W_1^* wieder W, W_1. Durchläuft $V^{(n)} = \begin{pmatrix} V_1^{(h)} & V_3 \\ V_3' & V_2 \end{pmatrix} = V'$ alle reellen Matrizen, so wird

$$a_W(E, s) = \int_{V_1} \operatorname{abs}(V_1 + iE_1)^{-s}\, e^{-2\pi i \sigma(V_1 W_1)} \int_{V_2, V_3} \operatorname{abs}(V_2 + N)^{-s}\, dV_3\, dV_2\, dV_1,$$

$$N = iE_2 - (V_1 + iE_1)^{-1}[V_3],\ (V_1 + iE_1)^{-1} = (V_1 - iE_1)(V_1^2 + E_1)^{-1},$$

$$\operatorname{Im} N = E_2 + (V_1^2 + E_1)^{-1}[V_3] = [C] > 0,\ (V_1^2 + E_1)^{-1} = [B] > 0.$$

Vermöge $V_2 + \operatorname{Re} N = V_2^*[C]$, $dV_2 = (\operatorname{abs} C)^{n-h+1} dV_2^*$ erhält das innere Integral die Gestalt

$$\int_{V_2} \operatorname{abs}(V_2 + iE_2)^{-s} dV_2 \cdot \int_{V_3} |[BV_3] + E_2|^{\frac{n-h+1}{2} - s} dV_3$$

und davon der zweite Faktor durch (4), (1.3) die Form $\gamma_{n-h}^{-1}\left(s-\frac{n-h+1}{2}\right)$ mal

$$\int_{\mathfrak{P}_{n-h}} |P|^{s-n+h-1} e^{-\pi\sigma(P)} \int_{V_3^*} e^{-\pi\sigma(P[V_3'B'])}\, dV_3\, dP = \operatorname{abs}(V_1+iE_1)^{n-h}\gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right),$$

wobei $V_3^* = BV_3A$, $P = AA'$, $dV_3^* = (\operatorname{abs}A)^h(\operatorname{abs}B)^{n-h}dV_3$ substituiert worden ist; insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-\frac{s}{2}}\, dv = \frac{\gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)}. \tag{1.17}$$

Zusammenfassung ergibt

$$a_W(E,s) = \frac{\gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right)}{\gamma_{n-h}\left(s-\frac{n-h+1}{2}\right)} a_0(E_2,s)\, a_{W_1}(E_1, s-n+h). \tag{1.18}$$

Nun ist (1.2) für $n=1$ richtig: wegen (1.16), (1.17) und der Legendreschen Identität

$$\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) = 2^{2-s}\gamma(s-1). \tag{1.19}$$

Ist (1.2) für $1, \ldots, n-1$ statt n richtig, so nach (1.15), (1.16), (1.18) auch für n. Damit ist (1.2) bewiesen und über (1.2), (1.18) auch Hilfssatz 4.

Übrigens gilt, nach (1.19), für den in (1.2) und Hilfssatz 4 und 5 auftretenden Faktor

$$2^{(n-h)\left(\frac{n-h+3}{3}-s\right)} \frac{\gamma_{n-h}\left(s-\frac{n+1}{2}\right)}{\gamma_{n-h}^2\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\gamma\left(\frac{s-n+h}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n-h} \frac{\gamma\left(s-\frac{n+k}{2}\right)}{\gamma(s-k)} \quad (0 \leqq h < n), \tag{1.20}$$

wobei das Produkt rechts eventuell noch gekürzt werden kann, z. B.

$$\prod_{k=1}^{n-h} \frac{\gamma\left(s-\frac{n+k}{2}\right)}{\gamma(s-k)} = \prod_{k=1}^{[n/2]} \frac{\gamma\left(s-\frac{1}{2}-n+k\right)}{\gamma(s-k)} \qquad (h=0,1). \tag{1.21}$$

3. Im Fall $n=h=p=1$ lautet (1.13)

$$h(l,\alpha,\beta) = \int_0^{\infty} (v+1)^{\alpha-1} v^{\beta-1} e^{-vl}\, dv \qquad (l>0), \tag{1.22}$$

bei absoluter Konvergenz für $\operatorname{Re}\beta > 0$; gemäß der Darstellung

$$(e^{2\pi i\beta}-1)\, h(l,\alpha,\beta) = \int_{\circlearrowright 0} (v+1)^{\alpha-1} v^{\beta-1} e^{-vl}\, dv \tag{1.23}$$

als Schleifenintegral ist $h(l,\alpha,\beta)/\Gamma(\beta)$ eine ganze Funktion von α und β, für

die noch die Funktionalgleichung

$$h(l, \alpha, \beta)/\Gamma(\beta) = l^{1-\alpha-\beta} h(l, 1-\beta, 1-\alpha)/\Gamma(1-\alpha) \tag{1.24}$$

bekannt ist. Über (1.2), (1.5), (1.8), (1.14), (1.20), (1.22), (1.24) bestätigt man (7) und (9).

Im Fall $n = h = 2$ unterscheide man hinsichtlich (1.9)—(1.13)

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (|T| > 0) \\ 1 & (|T| < 0), \end{cases} \qquad h_\varepsilon = \begin{cases} h_{20} & (\varepsilon = 0) \\ h_{11} & (\varepsilon = 1) . \end{cases} \tag{1.25}$$

Hilfssatz 6: *Die Funktionen von α und β*

$$h_0(L, \alpha, \beta)/\Gamma(\beta)\,\Gamma\left(\beta - \tfrac{1}{2}\right), \quad h_1(L, \alpha, \beta)/\Gamma\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)$$

sind ganz und genügen den Funktionalgleichungen

$$h_\varepsilon(L, \alpha, \beta) = |L|^{\frac{3}{2} - \alpha - \beta} h_\varepsilon\left(L, \tfrac{3}{2} - \beta, \tfrac{3}{2} - \alpha\right) \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} & (\varepsilon = 0) \\ \dfrac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})\,\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)} & (\varepsilon = 1). \end{cases}$$

Beweis: Man darf $L = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l' \end{pmatrix}$ diagonal annehmen[4]).

$\varepsilon = 0$: Das Gebiet $V = \begin{pmatrix} u & w \\ w & v \end{pmatrix} > 0$ wird durch

$$u = x, \; v = y(z^2+1) + (x+1)z^2, \; w = z\sqrt{x(x+1)}$$

eineindeutig auf das Gebiet $x > 0$, $y > 0$, $-\infty < z < \infty$ abgebildet; dabei gilt

$$|V| = xy(z^2+1), \; |V+E| = (x+1)(y+1)(z^2+1),$$
$$du\,dv\,dw = \sqrt{x(x+1)}\,(z^2+1)\,dx\,dy\,dz,$$

also nach (1.13), (1.22), (1.24), (1.25)

$$h_0(L, \alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z^2 l' + l, \alpha, \beta)\, h\left(z^2 l' + l', \alpha - \tfrac{1}{2}, \beta - \tfrac{1}{2}\right) \times \\ \times (z^2+1)^{\alpha+\beta-2} e^{-z^2 l'}\, dz$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} h(z^2 l' + l, 1-\beta, 1-\alpha)\, h\left(z^2 l' + l', \tfrac{3}{2} - \beta, \tfrac{3}{2} - \alpha\right) \times \\ \times (z^2 l' + l)^{1-\alpha-\beta}\, l'^{2-\alpha-\beta}\, e^{-z^2 l'}\, dz,$$

woraus durch $z \to \sqrt{l/l'}\,z$ die behauptete Funktionalgleichung folgt. Bei dieser Rechnung ist $\operatorname{Re}\alpha = \alpha' < 1$, $\operatorname{Re}\beta = \beta' > \frac{1}{2}$ zu halten;

$$h_0(L, \alpha', \beta') < h(l, \alpha', \beta')\, h\left(l', \alpha' - \tfrac{1}{2}, \beta' - \tfrac{1}{2}\right) h\left(l', \alpha' + \beta' - 1, \tfrac{1}{2}\right) \tag{1.26}$$

---

[4]) Ist $L^{(n)} = [D'], \begin{pmatrix} E^{(p)} & 0 \\ 0 & E^{(q)} \end{pmatrix} [D] = W^{(n)}$, so gilt, vgl. (1.14):

$$e^{-\sigma(L)/2}\, h_{pq}(L, \alpha, \beta) = (\operatorname{abs} 2W)^{\frac{n+1}{2} - \alpha - \beta} \int_{V \pm W > 0} |V+W|^{\alpha - \frac{n+1}{2}}\, |V-W|^{\beta - \frac{n+1}{2}} \times \\ \times e^{-\sigma(V)/2}\, dV^{(n)}.$$

Man kann nun, bei festem W, D so wählen, daß L Diagonalmatrix wird.

liefert die absolute Konvergenz des Integrals $h_0(L, \alpha, \beta)$ für $\operatorname{Re}\beta > \frac{1}{2}$. Weiter läßt sich h_0 nach Vorstehendem und (1.23) durch dreifache Integration über Schleifen darstellen (die den Nullpunkt in positivem Sinn umschlingen); so daß sich auch die Regularitätsbehauptung beweist.

$\varepsilon = 1$: Das Gebiet $\begin{pmatrix} u+1 & w \\ w & v \end{pmatrix} > 0$, $\begin{pmatrix} u & w \\ w & v+1 \end{pmatrix} > 0$ wird durch

$$u = x(z^2+1) + z^2,\ v = y(z^2+1) + z^2,\ w = z\sqrt{(x+1)(y+1)(z^2+1)}$$

eineindeutig auf das Gebiet $x > 0$, $y > 0$, $-\infty < z < \infty$ abgebildet; dabei gilt

$$(u+1)v - w^2 = (x+1)y(z^2+1),\ u(v+1) - w^2 = x(y+1)(z^2+1),$$
$$du\,dv\,dw = \sqrt{(x+1)(y+1)(z^2+1)}\,(z^2+1)\,dx\,dy\,dz,$$

also

$$h_1(L, \alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(z^2 l + l, \alpha, \beta - \tfrac{1}{2}\right) h\left(z^2 l' + l', \beta, \alpha - \tfrac{1}{2}\right) \times$$
$$\times (z^2+1)^{\alpha+\beta-\frac{3}{2}}\, e^{-z^2(l+l')}\,dz,$$

$$(1.27)\quad h_1(L, \alpha', \beta') < h\left(l, \alpha', \beta' - \tfrac{1}{2}\right) h\left(l', \beta', \alpha' - \tfrac{1}{2}\right) h\left(l+l', \alpha'+\beta' - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$

woraus, ähnlich wie oben, die Behauptungen folgen.

Übrigens erhält man die Funktionalgleichungen von h, h_0 und allgemein h_{n0} einheitlich, indem man den Faktor $|V+E|^{\alpha - \frac{n+1}{2}}$ des Integranden gemäß (4) durch das Γ_n-Integral ausdrückt und die Integrationen vertauscht.

(1.5), (1.8), (1.14), (1.15), (1.19), (1.25) und Hilfssatz 6 ergeben, weil $|L| = |4\pi H Y|$, $|H| = \operatorname{abs} T$:

Hilfssatz 7: *Für $|T^{(2)}| \neq 0$ ist die Funktion von s*

$$\frac{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma(s-1)}{\gamma\left(\frac{s-\varepsilon}{2}\right)} a_T(s) = \frac{|2Y|^{\frac{s}{2}}}{\gamma\left(\frac{s-\varepsilon}{2}\right)\gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} |2H|^{s-\frac{3}{2}}\, e^{-2\pi\sigma(HY)}\, h_\varepsilon\left(L, \tfrac{s}{2}, \tfrac{s}{2}\right)$$

ganz und genügt der Funktionalgleichung

$$(\operatorname{abs} 2T)^{-\frac{s}{2}} \frac{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma(s-1)}{\gamma\left(\frac{s-\varepsilon}{2}\right)} a_T(s) = \alpha(s) = \alpha(3-s).$$

Im Fall $n = 2$, $h = 1$ lautet (1.9)

$$(1.28)\qquad T = t[Q'] \qquad (Q = Q^{(2,1)}),$$

und (1.5), (1.8), (1.14), (1.15), (1.19), (1.22), (1.24) liefern, wenn $\operatorname{abs} t = |t|$ gesetzt wird:

Hilfssatz 8: *Für $|T^{(2)}| = 0$, $T \neq 0$ ist die Funktion von s*

$$\frac{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma(s-1)}{\gamma\left(\frac{2s-3}{2}\right)} a_T(s) = \frac{2^{s-1}|Y|^{\frac{3-s}{2}}}{\gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} (|t|\ Y[Q])^{s-2}\, e^{-2\pi|t|\,Y[Q]} \times$$
$$\times\, h\left(4\pi|t|\ Y[Q], \tfrac{s-1}{2}, \tfrac{s-1}{2}\right)$$

ganz und genügt der Funktionalgleichung

$$(|t|\ Y[Q])^{-\frac{s}{2}}\ |Y|^{\frac{s}{2}}\ \frac{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma(s-1)}{\gamma\left(\frac{2s-3}{2}\right)}\ a_T(s) = \alpha(s) = \alpha(4-s).$$

Nach (1.20), (1.21) und Hilfssatz 5 wird weiter

$$(1.29)\quad a_T(s) = |Y|^{\frac{3-s}{2}}\ Y[Q]^{\frac{s-3}{2}}\ \frac{\gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\gamma\left(\frac{2s-3}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma(s-1)}\ a_t(Y[Q], s-1)\,,$$

so daß Hilfssatz 8 auf (7) und (9) zurückgeführt ist.

Endlich gilt nach (1.2), (1.20), (1.21) für $T^{(2)} = 0$

$$(1.30)\qquad a_0(s) = |Y|^{\frac{3-s}{2}}\ \frac{\gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)\gamma\left(\frac{2s-3}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{s}{2}\right)\gamma(s-1)}\,.$$

4. Nachträglich soll jetzt im Fall $n = 2$ auch Hilfssatz 3 bewiesen werden. Dies genügt, weil es Zahlen y, $y' > 0$ mit $yE \leqq Y \leqq y'E$ gibt, für $Y = yE$; in den Gliedern der S_{pq}-Reihe tritt $e^{-\sigma(L)/2-\sigma(VL)}$ ja mit positivem $V + E/2$ auf, vgl. (1.11), (1.13). Gemäß (1.28), also $H = (\mathrm{abs}\, t)$, $L = (\mathrm{abs}\, 4\pi y t[Q]) \geqq$ $\geqq (4\pi y)$, wird die Konvergenz von $S_{10}(\beta > 0)$ und $S_{01}(\alpha > 0)$ durch die evidente Konvergenz von

$$\sum_{t=1}^{\infty}\ \sum_{\{Q^{(2,1)}\}} t^{\varkappa}\,[Q]^{\lambda}\,e^{-2\pi y t[Q]}$$

erwiesen. Für $p + q = 2$ kann man (1.10), (1.11) mit

$$(1.31)\qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{t_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{t_2} \end{pmatrix} S,\quad 2H[S'] = \frac{1}{2\pi y}\,L = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

ansetzen, S orthogonal, t_1, t_2 die Beträge der Eigenwerte von $2T$. Weil $t_1 + t_2 \geqq \mathrm{abs}\,\sigma(2T)$ und, falls $\sigma(2T) = 0$, $t_1 + t_2 = 2t_1$, $t_1^2 = \mathrm{abs}\, 2T \geqq 1$ gilt, ist stets $t_1 + t_2 \geqq 2$. Daher läßt sich — gemäß (1.22), (1.26), (1.27) sowie, für $\beta > 0$, $h(l, \alpha, \beta) < d_0 l^{-\delta_0}$ ($\delta_0 = \beta + \alpha - 1$, falls $\alpha \geqq 1$, $l \leqq 1$; $\delta_0 = \beta$ sonst; $d_0 > 0$ von l unabhängig) — $h_{pq}(L, \alpha, \beta) < d t_1^{-\delta_1} t_2^{-\delta_2}$ abschätzen, wobei d, δ_1, $\delta_2 > 0$ nur insofern von L abhängen, als eventuell δ_k unterschiedlich für $t_k \leqq 1$ und $t_k \geqq 1$ ($k = 1, 2$) zu nehmen ist. Dies gilt für jedes feste Paar α, β, mit dem $h_{pq}(L, \alpha, \beta)$ konvergiert: nach Hilfssatz 6 (insbesondere der Funktionalgleichung) für $\beta > \frac{1}{2}$ ($p = 2$, $q = 0$) bzw. $\alpha > \frac{1}{2}$ ($p = 0$, $q = 2$) bzw. $\alpha > \frac{1}{2}$, $\beta > \frac{1}{2}$ ($p = q = 1$). Also ist, s. (1.31), nur noch die Konvergenz von

$$\sum_{|T| \neq 0} t_1^{\varkappa_1} t_2^{\varkappa_2}\, q^{t_1 + t_2} \qquad (q, \varkappa_1, \varkappa_2 \text{ reell};\ 0 < q < 1)$$

(etwa mit der Anordnung $t_1 \leqq t_2$) zu zeigen. Dies genügt für ganze $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; sogar für positive ganze, weil $t_1^{\varkappa_1} t_2^{\varkappa_2} \leqq t_1^{\varkappa_1 + \varkappa} t_2^{\varkappa_2 + \varkappa} (\varkappa = 1, 2, \ldots)$. Weiter gilt $t_1^{\varkappa_1} t_2^{\varkappa_2} <$ $< (t_1 + t_2)^{\varkappa_1 + \varkappa_2} < d_2 q^{-d_1 (t_1 + t_2)}$ mit von $t_1 + t_2$ unabhängigen Zahlen d_1,

$d_2 (0 < d_1 < 1, 0 < d_2)$; und der allein noch zu untersuchende Reihentyp $\sum_{|T| \neq 0} q^{t_1 + t_2}$ konvergiert, da, wenn $2T = (t_{kl})$, abs $t_{kl} = |t_{kl}|$ geschrieben wird,

$$(t_1 + t_2)^2 > t_1^2 + t_2^2 = \sigma(4T^2) = t_{11}^2 + 2t_{12}^2 + t_{22}^2 > \frac{1}{3}(|t_{11}| + |t_{12}| + |t_{22}|)^2 .$$

§ 2. $b_T(s)$

1. Die Symbole $\{A^{(n)}, B^{(n)}\}$, $\{C^{(n)}, D^{(n)}\}$, $\{K^{(n)}\}$ mögen die bei (1), (2), (3) erklärte Bedeutung haben und auch $R^{(n)} = R'$, $T^{(n)} = T'$ wieder, wie in der Einleitung, für rationale bzw. halbganze Matrizen stehen. Man erkennt leicht, daß die Menge aller Klassen $\{C, D\}$ sich eineindeutig der Menge aller Klassenpaare $\{A, B\}$, $\{K\}$ zuordnen läßt und dabei $C = KA$, $D = KB$ angenommen werden kann. Ein vollständiges Repräsentantensystem der Klassen $\{K\}$ erhält man nach EISENSTEIN so: Man lasse $k_{11}, \ldots, k_{nn}$ je alle natürlichen Zahlen durchlaufen und dabei k_{ij} ein vollständiges Restsystem modulo k_{jj}, jeweils für $i = j + 1, \ldots, n$; man setze $k_{ij} = 0$ für $1 \leqq i < j \leqq n$ und $(k_{ij}) = K$. Damit ist übrigens (3) und $\psi(s) = \zeta_n(s)\, \varphi(s)$ bewiesen. Weiter wird vermöge $A^{-1}B = R$ eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der $\{A, B\}$ mit $|A| \neq 0$ und der Menge der R induziert [4, S. 594]. Statt (16) gilt also auch

$$b_T(s) = \sum_{\substack{\{A,B\}\,(|A| \neq 0) \\ B \bmod A}} (\mathrm{abs}\, A)^{-s}\, e^{2\pi i \sigma(TA^{-1}B)} , \tag{2.1}$$

$$\zeta_n(s)\, b_T(s) = \sum_{\substack{\{C,D\}\,(|C| \neq 0) \\ D \bmod C}} (\mathrm{abs}\, C)^{-s}\, e^{2\pi i \sigma(TC^{-1}D)} , \tag{2.2}$$

wobei z. B. $B_1 \equiv B_2 \bmod A$ mit einer Gleichung $B_1 = B_2 + AG$ ($G^{(n)} = G'$ ganz) gleichwertig ist. Für $\mathrm{Re}\, s = \sigma > n + 1$ konvergieren diese Reihen absolut [6, S. 588], was im folgenden für $n \leqq 2$ von selbst herauskommen wird.

Beschränkt man sich in dem Vorstehenden auf die Klassen $\{A_p, B_p\}$, $\{C_p, D_p\}$, $\{K_p\}$, für die $\mathrm{abs}\, A_p$, $\mathrm{abs}\, C_p$, $\mathrm{abs}\, K_p$ Potenzen einer festen Primzahl p sind, so bleibt die erwähnte Zuordnung auch zwischen diesen Klassen richtig. Multipliziert man die Gleichungen

$$\sum_{\{K_p\}} (\mathrm{abs}\, K_p)^{-s} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - p^{k-s})^{-1} ,$$

$$b_p = \sum_{\substack{\{A_p, B_p\} \\ B_p \bmod A_p}} (\mathrm{abs}\, A_p)^{-s}\, e^{2\pi i \sigma(TA_p^{-1}B_p)} ,$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - p^{k-s})^{-1} b_p = \sum_{\substack{\{C_p, D_p\} \\ D_p \bmod C_p}} (\mathrm{abs}\, C_p)^{-s}\, e^{2\pi i \sigma(TC_p^{-1}D_p)} \tag{2.3}$$

jeweils über alle Primzahlen p, so erhält man (3), (2.1), (2.2); denn variiert R modulo 1 und durchläuft $R_p = R'_p$ alle rationalen Matrizen modulo 1, für die $\nu(R_p)$ eine Potenz von p ist, so läßt sich dabei (wie schon in [5], S. 654, verwendet) in eindeutiger Zerlegung $R \equiv \sum_p R_p \bmod 1$ mit $\nu(R) = \prod_p \nu(R_p)$

erreichen, also

$$b_T(s) = \prod_p b_p \,. \tag{2.4}$$

In (2.3) summiere man zuerst über alle zulässigen D_p bei festem C_p. Mit geeigneten unimodularen U, V wird VC_pU^{-1} eine Diagonalmatrix

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & f_n \end{pmatrix}, \quad f_k = p^{l_1+\ldots+l_k} \quad \begin{pmatrix} l_k = 0,1,\ldots \\ k = 1,\ldots,n \end{pmatrix}; \tag{2.5}$$

Symmetrie von $(C_p^{-1}D_p)[U'] = F^{-1}VD_pU'$ bedeutet für $VD_pU' = G = (g_{kl})$ das Bedingungensystem $g_{lk} = f_k^{-1}f_l g_{kl}$ $(1 \leqq k < l \leqq n)$; die Summationsvorschrift $D_p \bmod C_p$ ist mit $G \bmod F$, also $g_{kl} \bmod f_k$ $(1 \leqq k \leqq l \leqq n)$ gleichwertig. Nun bilden die Restklassen $D_p \bmod C_p$ bei festem C_p eine additive Abelsche Gruppe, so daß

$$S = \sum_{D_p \bmod C_p} e^{2\pi i \sigma(TC_p^{-1}D_p)} = e^{2\pi i \sigma(TC_p^{-1}D_p)}\, S \,,$$

also $S = f_1^n f_2^{n-1} \ldots f_n$, wenn alle Spuren $\sigma(TC_p^{-1}D_p) = \sigma(T[U^{-1}]F^{-1}G)$ ganz sind, und sonst $S = 0$. Das erste tritt genau dann ein, wenn die halbganze Matrix $T[U^{-1}] = (t_{kl})$

$$\varepsilon_{kl} t_{kl} \equiv 0 \bmod f_k, \quad \varepsilon_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 2 & (k < l) \end{cases}, \qquad (1 \leqq k \leqq l \leqq n) \tag{2.6}$$

befriedigt.

Zu gegebenem F, (2.5), teile man die Gesamtheit der FU (U beliebig unimodular) in Klassen $\{FU_i\}$ $(i = 1, \ldots, i_F)$ auf. Diejenigen $U = (u_{kl})$, für die $\{FU\} = \{F\}$ bzw. $\{FU\} = \{FU_i\}$ gilt, bilden eine Gruppe $\mathfrak{U}_F$ bzw. eine rechtsseitige Nebenklasse $\mathfrak{U}_F U_i$; $\mathfrak{U}_F$ wird auch durch $FUF^{-1} \equiv 0 \bmod 1$ oder

$$u_{kl} \equiv 0 \bmod f_k^{-1} f_l \qquad (1 \leqq k < l \leqq n) \tag{2.7}$$

bestimmt und hat i_F als Index in der vollen unimodularen Gruppe $\mathfrak{U}$. Nach Herleitung der Bedingungen (2.6) werden diese von $(t_{kl}) = T[U^{-1}]$ nur gleichzeitig für alle U einer Nebenklasse $\mathfrak{U}_F U_i$ befriedigt; vermöge (2.7) rechnet man aber auch leicht nach, daß mit (t_{kl}) auch $(t_{kl})[U]$ (U aus $\mathfrak{U}_F$) (2.6) erfüllt. Ist $j_F = j(F, T)$ die Anzahl der Nebenklassen, „die (2.6) befriedigen", so wird aus (2.3)

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - p^{k-s})^{-1} b_p = \sum_F j_F f_1^n f_2^{n-1} \ldots f_n (f_1 \ldots f_n)^{-s} \,, \tag{2.8}$$

summiert gemäß (2.5) über $l_k = 0, 1, \ldots$ $(k = 1, \ldots, n)$.

2. Im Fall $n = 1$ ist $i_F = 1$ oder 0, je nachdem f Teiler von t ist oder nicht ($F = (f)$, $T = (t)$); über (2.4), (2.8) folgt (8).

Im Fall $n = 2$, in dem (2.7)

$$u_{12} \equiv 0 \bmod p^l \qquad (f_1 = p^{l_1}, f_2 = p^{l_1+l})$$

lautet, ist

$$i_F = \begin{cases} 1 & (l = 0) \\ p^l + p^{l-1} & (l > 0). \end{cases} \tag{2.9}$$

Man sondere nämlich für jedes $m = 0, 1, \ldots, l$ aus einem vollständigen Restsystem modulo p^{l-m} (das für $m = l$ aus einer einzigen Zahl, man wähle die 1, besteht) alle die Zahlen aus, die zu p^m nicht teilerfremd sind; a_m durchlaufe die übriggebliebenen Zahlen. Ergänzt man jedes Paar a_m, p^m zu einer unimodularen Matrix $\begin{pmatrix} a_m & p^m \\ * & * \end{pmatrix}$, so hat man für festes m

$$p^l(m = 0),\ p^{l-m} - p^{l-m-1}(0 < m < l),\ 1(m = l)$$

und insgesamt $1(l = 0)$ bzw. $p^l + p^{l-1}(l > 0)$ Matrizen festgelegt; diese bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebenklassen von $\mathfrak{U}_F$ in $\mathfrak{U}$. Denn für gegebenes unimodulares $\begin{pmatrix} u & v \\ * & * \end{pmatrix}$ ist die Forderung, daß $\begin{pmatrix} u & v \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_m & p^m \\ * & * \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & va_m - up^m \\ * & * \end{pmatrix}$ in $\mathfrak{U}_F$ liege, mit der Kongruenz $va_m \equiv up^m \bmod p^l$ gleichwertig; diese zieht $p^m = (v, p^l)$ nach sich und bestimmt eindeutig eine Restklasse $a_m \bmod p^{l-m}$.

Über (2.4), (2.6), (2.8), (2.9) folgt für $T = 0$

$$(2.10) \qquad b_p = \frac{(1-p^{-s})(1-p^{2-2s})}{(1-p^{2-s})(1-p^{3-2s})}, \qquad b_0(s) = \frac{\zeta(s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(s)\zeta(2s-2)}.$$

Im Fall $n = 3$ kann man gemäß (2.5), (2.7) für $i_F = i(l_2, l_3) = i(l_3, l_2)$ den Ausdruck

$$i_F = \begin{cases} 1 & (l_2 = 0, l_3 = 0) \\ p^{2l_3} + p^{2l_3-1} + p^{2l_3-2} & (l_2 = 0, l_3 > 0) \\ p^{2l_2} + p^{2l_2-1} + p^{2l_2-2} & (l_2 > 0, l_3 = 0) \\ (p^{2l_2} + p^{2l_2-1} + p^{2l_2-2})(p^{2l_3} + p^{2l_3-1}) & (l_2 > 0, l_3 > 0) \end{cases}$$

beweisen und damit für $T = 0$

$$b_p = \frac{(1-p^{-s})(1-p^{2-2s})}{(1-p^{3-s})(1-p^{5-2s})}, \qquad b_0(s) = \frac{\zeta(s-3)\,\zeta\,2s-5)}{\zeta(s)\,\zeta(2s-2)}.$$

3. Weiterhin sei $n = 2$ und $T \neq 0$. Die „Klasse von T", $\{T\}$, wird als die Gesamtheit der $T[U]$ (U beliebig unimodular) eingeführt. Weil $\mathfrak{U}_F U_i \to \mathfrak{U}_F U_i U$ ($i = 1, \ldots, i_F$) eine Permutation der Nebenklassen von $\mathfrak{U}_F$ bedeutet, wobei $T[U_i^{-1}] = T[U]\,[(U_i U)^{-1}]$, ist j_F und damit nach (2.8), (2.4) auch b_p, $b_T(s)$ Invariante der Klasse von T; das gilt auch von den — (t_{kl}) aus $\{T\}$ zugeordneten — ganzen Zahlen

$$(2.11) \qquad t_1 = (t_{11}, 2t_{12}, t_{22}), \quad t = (2t_{12})^2 - 4t_{11}t_{22}$$

sowie der Diskriminante t^* des durch $\sqrt{t}$ erzeugten Körpers und dem Kroneckerschen Symbol $\chi(p) = \chi_T(p) = \left(\frac{t^*}{p}\right)$; α_1, 2α seien die genauen Exponenten, mit denen die Primzahl p in t_1 bzw. t/t^* aufgeht[5]). Es gilt

$$(2.12) \qquad 0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha,$$

[5]) Auch $+\infty$ ist als „Exponent" zu erklären (mit dem p in 0 steckt) und im folgenden jede Relation, in der $+\infty$ auftritt, sinngemäß zu interpretieren. t^* und $\chi(p)$ werden nur im Fall $t \neq 0$ verwendet.

denn z. B. für $p = 2$, $\chi(2) = 0$ kann in

$$2^{2(\alpha-\alpha_1)}t^* \equiv 2^{-2\alpha_1}t \equiv (2^{1-\alpha_1}t_{12})^2 \bmod 4$$

links keine ungerade Zahl stehen — sie wäre zugleich $\equiv 1$ und $\equiv 3 \bmod 4$ — vielmehr nur eine Zahl $\equiv 0 \bmod 4$.

Hilfssatz 9: *Ist* $F = \begin{pmatrix} p^{l_1} & 0 \\ 0 & p^{l_1+l_2} \end{pmatrix}$, *so gilt*

$$j_F = j(F, T) = \begin{cases} 1\,(l_2 = 0),\ p^{l_2} + p^{l_2-1}(l_2 > 0), & \text{falls } l_1 \leqq \alpha_1, \quad l_1 + l_2 \leqq \alpha_1\,, \\ p^{[(\alpha_1 - l_1 + l_2)/2]}, & \text{falls } l_1 \leqq \alpha_1,\ \alpha_1 < l_1 + l_2 \leqq 2\alpha - \alpha_1, \\ (\chi(p) + 1)\, p^{\alpha - l_1}\,, & \text{falls } l_1 \leqq \alpha_1, \quad l_1 + l_2 = 2\alpha - \alpha_1 + 1\,, \\ \chi(p)\,(\chi(p) + 1)\, p^{\alpha - l_1}, & \text{falls } l_1 \leqq \alpha_1, \quad l_1 + l_2 \geqq 2\alpha - \alpha_1 + 2\,, \\ 0, & \text{falls } l_1 > \alpha_1, \quad l_2 \geqq 0\,. \end{cases}$$

Beweis: $l_1, l_2, \{T\}$ seien fest, dagegen (t_{kl}) in $\{T\}$ jeweils zu F „passend" gewählt. Falls $j_F > 0$, kann man (2.6) annehmen, und es folgt $l_1 \leqq \alpha_1$. Weiterhin werde $l_1 \leqq \alpha_1$ vorausgesetzt. Dann ist j_F gleich der Anzahl der bei (2.9) festgelegten Matrizen $\begin{pmatrix} a_m & p^m \\ * & * \end{pmatrix}$ $(m = 0, \ldots, l;\ l = l_2)$, die

$$t_{11}p^{2m} - 2t_{12}p^m a_m + t_{22}a_m^2 \equiv 0 \bmod p^{l_1+l_2} \tag{2.13}$$

erfüllen. Offenbar bedarf der Satz nur für den Fall $l_1 + l_2 > \alpha_1$ noch des Beweises. Dazu bestimme man bei fester Potenz p^r $(r \geqq 1)$ (t_{kl}) so, daß mit ganzen a, b, c

$$(p^{-\alpha_1}2t_{kl}) \equiv \begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{pmatrix} \bmod p^r\,, \qquad \begin{cases} p \nmid b\,, \\ c = 0 \ (p > 2)\,, \\ c = 0 \text{ oder } 2 \nmid c \ (p = 2)\,, \end{cases} \tag{2.14}$$

ausfällt[6]), insbesondere zufolge (2.11)

$$p^{-2\alpha_1}t \equiv c^2 - 4ab \bmod p^r\,. \tag{2.15}$$

Hält man

$$r \geqq \beta = \begin{cases} 2 + l_1 + l_2 - \alpha_1 \ (p = 2) \\ \quad l_1 + l_2 - \alpha_1 \ (p > 2)\,, \end{cases} \tag{2.16}$$

so wird (2.13) mit

$$ap^{2m} - cp^m a_m + ba_m^2 \equiv 0 \bmod p^{l_1+l_2-\alpha_1}$$

gleichbedeutend, dies wiederum — weil Lösungen a_m, $(a_m, p^m) = 1$, ersichtlich höchstens bei $m = 0$ existieren — über (2.15) mit

$$(2ba_0 - c)^2 \equiv p^{-2\alpha_1}t \bmod p^\beta\,. \tag{2.17}$$

Liegt (2.17) mit $c \neq 0$ vor, so ist gemäß (2.15) $2^{-2\alpha_1}t$ ungerade. Nach allem gilt

$$j_F = 2 \cdot 2^{l_2-\beta} A(2^\beta)\ (p = 2) \text{ bzw. } p^{l_2-\beta} A(p^\beta)\ (p > 2) \tag{2.18}$$

[6]) Diese leicht herzuleitenden Normalformen stehen schon, sogar auf n-reihige (ganze) Matrizen verallgemeinert, in Minkowskis Preisarbeit.

mit der Anzahl der Lösungen $x \bmod p^\beta$ von $x^2 \equiv p^{-2\alpha_1} t \bmod p^\beta$

$$A(p^\beta) = \begin{cases} p^{[\beta/2]} & (\beta \leqq 2\gamma) \\ (\chi(p)+1)\, p^\gamma & (\beta = 2\gamma+1), \\ \chi(p)\,(\chi(p)+1)\, p^\gamma & (\beta \geqq 2\gamma+2) \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\gamma = \begin{cases} \alpha - \alpha_1 + 1 & (p=2) \\ \alpha - \alpha_1 & (p>2). \end{cases}$$

Durch (2.16), (2.18), (2.19) ist der Beweis erbracht.

Mit den Abkürzungen $W = \sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(1-s)}$, $w = p^{\alpha(3-2s)-\alpha_1(1-s)}$ $(t \neq 0)$ oder $0\,(t=0)$ und der Formel

$$\sum_{l=1}^{2(\alpha-\alpha_1)} p^{[l/2]+l(1-s)} = \left(\frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}} - 1\right)\left(1 - p^{(\alpha-\alpha_1)(3-2s)}\right)$$

erhält man über (2.8) und Hilfssatz 9

$$b_p = (1-p^{-s})(1-p^{1-s})(K+L+M+N),$$

$$K = \sum_{l_1=0}^{\alpha_1}\left\{1 + \sum_{l_2=1}^{\alpha_1-l_1}(p^{l_2}+p^{l_2-1})\, p^{l_2(1-s)}\right\} p^{l_1(3-2s)},$$

$$L = \sum_{l_1=0}^{\alpha_1}\left\{\sum_{l_2=\alpha-\alpha_1-l_1+1}^{2\alpha-\alpha_1-l_1} p^{[(\alpha_1-l_1+l_2)/2]+l_2(1-s)}\right\} p^{l_1(3-2s)} = L_1 + L_2,$$

$$M = (\chi(p)+1)\, p^{1-s} w W,$$

$$N = \sum_{l_1=0}^{\alpha_1}\left\{\chi(p)\,(\chi(p)+1)\, p^{\alpha-l_1} \sum_{l_2=2\alpha-\alpha_1-l_1+2}^{\infty} p^{l_2(1-s)}\right\} p^{l_1(3-2s)}$$

$$= \frac{\chi(p)+\chi^2(p)}{1-p^{1-s}}\, p^{2-2s} w W$$

und weiter

$$K = \sum_{l_1=0}^{\alpha_1-1}\left\{(1+p^{1-s}) \sum_{l_2=0}^{\alpha_1-l_1-1} p^{l_2(2-s)} + p^{(\alpha_1-l_1)(2-s)}\right\} p^{l_1(3-2s)} + p^{\alpha_1(3-2s)}$$

$$= \frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}}\left\{\sum_{l_1=0}^{\alpha_1-1}\sum_{l_2=0}^{\alpha_1-l_1-1} p^{l_2(2-s)+l_1(3-2s)} - \sum_{l_1=1}^{\alpha_1}\sum_{l_2=0}^{\alpha_1-l_1} p^{l_2(2-s)+l_1(3-2s)}\right\} +$$

$$+ p^{\alpha_1(2-s)} W = \frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}}\left\{\sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-s)} - p^{\alpha_1(2-s)} W\right\} + p^{\alpha_1(2-s)} W,$$

$$L_1 = \left(\frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}} - 1\right) p^{\alpha_1(2-s)} W, \quad L_2 = \left(1 - \frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}}\right) w W,$$

$$K + L_1 = \frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}} \sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-s)},$$

$$L_2 + M + N = -\frac{1+p^{1-s}}{1-p^{3-2s}} w W + \frac{1+p^{1-s}}{1-\chi(p)\, p^{1-s}} w W.$$

Beachtet man noch im Fall $t \neq 0$

$$(1-\chi(p)\,p^{1-s})\left(\sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-s)} - w\,W\right) + (1-p^{3-2s})\,w\,W$$
$$= \sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-s)}\,\{(1-p^{(\alpha-l+1)(3-2s)}) - \chi(p)\,p^{1-s}(1-p^{(\alpha-l)(3-2s)})\}$$

sowie (2.4), (2.12), so ergibt sich insgesamt (in Verallgemeinerung von (2.10)):

Hilfssatz 10: *Es gilt für* $T \neq 0$

$$b_p = \begin{cases} \dfrac{(1-p^{-s})(1-p^{2-2s})}{1-p^{3-2s}}\,F_p, & \text{falls } |T| = 0 \\ \dfrac{(1-p^{-s})(1-p^{2-2s})}{1-\chi(p)\,p^{1-s}}\,F_p, & \text{falls } |T| \neq 0\,, \end{cases}$$

mit dem Polynom in p^{-s}

$$F_p = F_p(s) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-s)} \\ \sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-s)} \left\{ \sum_{m=0}^{\alpha-l} p^{m(3-2s)} - \chi(p)\,p^{1-s} \sum_{m=0}^{\alpha-l-1} p^{m(3-2s)} \right\}, \end{cases}$$

welches

$$F_p(s) = \begin{cases} p^{\alpha_1(2-s)} F_p(4-s) \\ p^{\alpha(3-2s)} F_p(3-s) \end{cases}$$

erfüllt[7]*; und weiter*

$$b_T(s) = \begin{cases} \dfrac{\zeta(2s-3)}{\zeta(s)\,\zeta(2s-2)}\,F_T(s) \\ \dfrac{L_T(s-1)}{\zeta(s)\,\zeta(2s-2)}\,F_T(s) \end{cases}$$

mit $L_T(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi(k)\,k^{-s}$ *und der endlichen Dirichletschen Reihe der Variablen* s

$$F_T(s) = \begin{cases} \prod_{p|t_1} F_p \\ \prod_{p|t} F_p\,, \end{cases}$$

die der Funktionalgleichung

$$F_T(s) = \begin{cases} t_1^{2-s} & F_T(4-s) \\ \left(\dfrac{t}{t^*}\right)^{\frac{3}{2}-s} & F_T(3-s) \end{cases}$$

genügt.

Übrigens ist im Fall $|T| = 0$, für ein gewisses unimodulares U, $T = \pm \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U]$; und nach (8) und Hilfssatz 10 wird

$$b_T(s) = b_{\left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(s) = \frac{\zeta(s-1)\zeta(2s-3)}{\zeta(s)\,\zeta(2s-2)}\,b_{t_1}(s-1)\,, \tag{2.20}$$

so daß die Funktionalgleichung von $b_T(s)$ auf (10) zurückgeführt ist.

[7]) Man ändere den Summationsindex: $l \to \alpha_1 - l$ ($|T| = 0$) bzw. $m_1 \to \alpha - l - m_1$, $m_2 \to \alpha - l - 1 - m_2$ ($|T| \neq 0$).

Folgendermaßen kann $F_T(s)$ gleichmäßig in s majorisiert werden. Für $|T| = 0$ ist $F_T(s) = \sum_{k|t_1} k^{2-s}$ schon in der Einleitung abgeschätzt worden. Für $|T| \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{abs} F_T(s) &\leqq \prod_{p|t} \sum_{l=0}^{\alpha_1} p^{l(2-\sigma)} \sum_{m=0}^{2(\alpha-l)} p^{m\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)} \\ &= \sum_{k|t_1} k^{2-\sigma} \sum_{l \Big| \frac{t}{k^2 t^*}} l^{\frac{3}{2}-\sigma}, \end{aligned}$$

woraus man (unscharf) etwa

$$\operatorname{abs} F_T(s) \leqq \sum_{k|t_1} \sum_{l \Big| \frac{t}{kt^*}} l^{2-\sigma} \leqq \left(\sum_{k|t_1} 1\right)\left(\sum_{l \Big| \frac{t}{t^*}} l^{2-\sigma}\right),$$

$$F_T(s) = O\left(\left(\frac{t}{t^*}\right)^{2\mu}\right) \qquad (\mu > 0, \mu > 2-\sigma) \tag{2.21}$$

folgern kann.

§ 3. Analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung von $\varphi\,(\mathfrak{Z}^{(2)}, s)$

Weiterhin sei $n = 2$. Gemäß den Vorbereitungen (11), (13), (15), (1.29), (1.30), (2.10), (2.20) gilt

$$\varphi(s) = \Phi_0(s) + \Phi_1(s) + \Phi_2(s)\,, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(s) = |Y|^{\frac{s}{2}} + |Y|^{\frac{1}{2}} \sum_Q \left(|Y|^{-\frac{1}{2}}\, Y[Q]\right)^{1-s} \frac{\varrho(s-1)}{\varrho(s)} + \\ + |Y|^{\frac{3-s}{2}} \frac{\varrho(s-2)(\varrho(2s-3)}{\varrho(s)\,\varrho(2s-2)}\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \Phi_1(s) = \sum_{t \neq 0} \sum_Q \Big\{ |Y|^{\frac{s}{2}}\, Y[Q]^{-\frac{s}{2}}\, c_{Q,t}(s) + \\ \qquad + |Y|^{\frac{3-s}{2}}\, Y[Q]^{\frac{s-3}{2}}\, c_{Q,t}(s-1) \frac{\varrho(s-1)\,\varrho(2s-3)}{\varrho(s)\,\varrho(2s-2)} \Big\} e^{2\pi i t X[Q]}\,, \\ c_{Q,t}(s) = a_t(Y[Q], s)\, b_t(s)\,, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\Phi_2(s) = \sum_{|T| \neq 0} a_T(s)\, b_T(s)\, e^{2\pi i \sigma(TX)}\,, \tag{3.4}$$

summiert über alle Spalten $Q^{(2,1)}$ teilerfremder ganzer Zahlen, unter Identifizierung von $\pm Q$, alle ganzen Zahlen $t \neq 0$ und alle halbganzen symmetrischen Matrizen $T^{(2)}$ vom Rang 2.

Da

$$\varphi^*(s) = \sum_Q \left(|Y|^{-\frac{1}{2}}\, Y[Q]\right)^{-\frac{s}{2}}$$

oder vielmehr $\psi^*(s) = \zeta(s)\,\varphi^*(s)$ eine Funktion von dem (in der Einleitung für $n = 1$ behandelten) Typ (2′) ist, für den (12) gilt, ist $\Phi_0(s)$ meromorph und genügt dank $\varrho(s) = \varrho(1-s)$ der Funktionalgleichung

$$\varrho(s)\,\varrho(2s-2)\,\Phi_0(s) = \Omega_0(s) = \Omega_0(3-s)\,; \tag{3.5}$$

für $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 2$ ist $\Phi_0(s)$ regulär bis auf einen Pol 1. Ordnung in $s = 3$ vom Residuum $90\pi^{-2}$. $\Omega_0(s)$ weist höchstens Pole 1. Ordnung in $s = 0, 1, 2, 3$ auf; die Residuen in $s = 0$ und 3 sind $-\varrho(3)$ bzw. $\varrho(3)$.

Wie schon in der Einleitung gesagt und in § 1, § 2 bestätigt, ist $c_{Q,t}(s)\,\varrho(s)$ für $t \neq 0$ eine ganze Funktion mit den Eigenschaften (7)—(10), also die Funktion

$$(3.6)\quad \begin{cases} |Y|^{\frac{s}{2}}\, Y[Q]^{-\frac{s}{2}}\, c_{Q,t}(s)\,\varrho(s)\,\varrho(2s-2) + \\ \quad + |Y|^{\frac{3-s}{2}}\, Y[Q]^{\frac{s-3}{2}}\, c_{Q,t}(s-1)\,\varrho(s-1)\,\varrho(2s-3) = \varkappa(s) = \varkappa(3-s) \end{cases}$$

meromorph mit allein Polen 1. Ordnung in $s = 1$ und 2. Vermöge der in der Einleitung angegebenen Abschätzung von $\zeta(s) b_t(s)$ und Hilfssatz 3 ($n = 2, h = 1$) konvergieren die Reihen

$$\sum_{t \neq 0, Q} \mathrm{abs}\left(Y[Q]^{-\frac{s}{2}}\, c_{Q,t}(s)\,\varrho(s)\right), \quad \sum_{t \neq 0, Q} \mathrm{abs}\left(Y[Q]^{\frac{s-3}{2}}\, c_{Q,t}(s-1)\,\varrho(s-1)\right)$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ und in jeder dort gelegenen Kreisscheibe offenbar sogar gleichmäßig. Die Entwicklung (3.3) ist demnach zunächst für $\sigma > 1$, nach (3.6) aber gleich in der ganzen s-Ebene gültig, stellt dabei eine meromorphe Funktion dar und genügt, s. (3.6), der Funktionalgleichung

$$(3.7)\qquad \varrho(s)\,\varrho(2s-2)\,\Phi_1(s) = \Omega_1(s) = \Omega_1(3-s)\ ;$$

für $\sigma > 2$ ist $\Phi_1(s)$ regulär, während $\Omega_1(s)$ nur Pole 1. Ordnung in $s = 1$ und 2 aufweist.

Hinsichtlich (3.4) beachte man die Hilfssätze 7 und 10 (mit den Bezeichnungen $\varepsilon = 0$ ($t^* < 0$) oder 1 ($t^* < 0$), t^* gleich Diskriminante des durch $\sqrt{t} = \sqrt{-|2T|}$ erzeugten Körpers) sowie

$$(\mathrm{abs}\, t^*)^{\frac{s}{2}}\, \gamma\left(\frac{s+1-\varepsilon}{2}\right) L_T(s) = \varrho_T(s) = \varrho_T(1-s)\,.$$

Danach ist die Funktion

$$(3.8)\qquad \varrho(s)\,\varrho(2s-2)\,a_T(s)\,b_T(s) = \varkappa(s) = \varkappa(3-s)$$

meromorph mit höchstens Polen 1. Ordnung in $s = 1$ und 2; und vermöge (2.21), Hilfssatz 3 ($n = h = 2$), ferner der durch Abelsche Summation erhältlichen Ungleichung[8])

$$\mathrm{abs}\, L_T(s) < \mathrm{abs}(2st)\,\zeta(\sigma+1) \qquad (\sigma > 0; t^* \neq 1)$$

zeigt sich die Gültigkeit auch der Entwicklung (3.4) zunächst für $\sigma > 1$, dann nach (3.8) in der ganzen s-Ebene. Für $\Phi_2(s)$ folgt Meromorphie, Funktionalgleichung

$$(3.9)\qquad \varrho(s)\,\varrho(2s-2)\,\Phi_2(s) = \Omega_2(s) = \Omega_2(3-s)\,,$$

Regularität für $\sigma > 2$; für $\Omega_2(s)$ sind allenfalls Pole 1. Ordnung in $s = 1$ und 2 festzustellen.

[8]) Jede Koeffizienten-Partialsumme der L_T-Reihe ist absolut kleiner als $\frac{1}{2}\,\mathrm{abs}\, t^* \leqq \leqq 2\,\mathrm{abs}\, t$.

Zusammenfassung gemäß (3.1)—(3.4), (3.5), (3.7), (3.9) erweist $\varphi(s)$ als meromorphe Funktion, die (17), d. i.

$$\varrho(s)\,\varrho(2s-2)\,\varphi(s) = \omega(s) = \omega(3-s), \qquad \omega(s) = \Omega_0(s) + \Omega_1(s) + \Omega_2(s)\,,$$

erfüllt und für $\sigma > 2$ bis auf einen Pol 1. Ordnung in $s = 3$ regulär ist. $\omega(s)$ hat Pole 1. Ordnung in $s = 0$ und $s = 3$, überdies nur — vielleicht — noch in $s = 1$ und $s = 2$.

Es verdient bemerkt zu werden, daß man zum Beweis der Meromorphie von $\varphi(s)$ statt Hilfssatz 10 nur zu wissen braucht, daß die F_p Polynome in p^{-s} sind, deren Produkt $F_T(s)$ sich in gewisser Weise (gleichmäßig in s) majorisieren läßt; explizite Gestalt und Funktionalgleichung von F_p können unbekannt bleiben. Die Funktionalgleichung von $\varphi(Z, s)$ gewinnt man dann unter Benutzung der Grundeigenschaften von $\varphi(Z, s)$ hinsichtlich Z, die in dieser Arbeit gar nicht berücksichtigt worden sind, aber bei der Untersuchung der Laurentreihen in den Punkten $s = 0, 1, 2, 3$ notwendig von Interesse werden: Invarianz gegenüber Modulsubstitutionen und elliptische Differentialgleichung; die Funktionalgleichung der $b_T(s)$ $(T \neq 0)$ wird dabei mitgeliefert [7].

Literatur

[1] BRAUN, H.: Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen. Math. Z. **44**, 387—397 (1939). — [2] KOECHER, M.: Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. J. reine angew. Math. **192**, 1—23 (1953). — [3] KOECHER, M.: Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen. Math. Nachr. **9**, 51—85 (1953). — [4] SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. Math. II. Ser. **36**, 527—606 (1935). — [5] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939). — [6] SIEGEL, C. L.: On the theory of indefinite quadratic forms. Ann. Math. **45**, 577—622 (1944). — [7] SIEGEL, C. L.: Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen. Math. Z. **63**, 363—373 (1956).

(Eingegangen am 20. Januar 1959)

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei, Gießen